

# 2025 年全国统一高考数学试卷

## (新高考II卷)

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在试卷上无效.
- 3.考试结束后,本试卷和答题卡一并交回.

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据 2, 8, 14, 16, 20 的平均数为 ( )  
A. 8                                  B. 9                                  C. 12                                  D. 18
2. 已知  $z=1+i$ , 则  $\frac{1}{z-1} = ( )$   
A.  $-i$                                   B.  $i$                                   C.  $-1$                                   D.  $1$
3. 已知集合  $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$ ,  $B = \{x \mid x^3 = x\}$ , 则  $A \cap B = ( )$   
A.  $\{0, 1, 2\}$                                   B.  $\{1, 2, 8\}$   
C.  $\{2, 8\}$                                   D.  $\{0, 1\}$
4. 不等式  $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$  的解集是 ( )  
A.  $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$                                   B.  $\{x \mid x \leq -2\}$   
C.  $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$                                   D.  $\{x \mid x > 1\}$
5. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = 2$ ,  $AC = 1 + \sqrt{3}$ ,  $AB = \sqrt{6}$ , 则  $A = ( )$   
A.  $45^\circ$                                   B.  $60^\circ$                                   C.  $120^\circ$                                   D.  $135^\circ$
6. 设抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $A$  在  $C$  上, 过  $A$  作  $C$  的准线的垂线, 垂足为  $B$ , 若直线  $BF$  的方程为  $y = -2x + 2$ , 则  $|AF| = ( )$   
A. 3                                  B. 4                                  C. 5                                  D. 6
7. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $S_3 = 6, S_5 = -5$ , 则  $S_6 = ( )$

- A. -20                      B. -15                      C. -10                      D. -5

8. 已知  $0 < \alpha < \pi$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{5}$                       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{10}$                       D.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9. 记  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和， $q$  为  $\{a_n\}$  的公比， $q > 0$ , 若  $S_3 = 7, a_3 = 1$ , 则 ( )

- A.  $q = \frac{1}{2}$                       B.  $a_5 = \frac{1}{9}$   
C.  $S_5 = 8$                       D.  $a_n + S_n = 8$

10. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，且当  $x > 0$  时， $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$ , 则 ( )

- A.  $f(0) = 0$                       B. 当  $x < 0$  时， $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$   
C.  $f(x) \geq 2$  当且仅当  $x \geq \sqrt{3}$                       D.  $x = -1$  是  $f(x)$  的极大值点

11. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ , 左、右顶点分别为  $A_1, A_2$ , 以  $F_1F_2$  为直径的圆与  $C$  的一条渐近线交于  $M, N$  两点，且  $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$ , 则 ( )

- A.  $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$                       B.  $|MA_1| = 2|MA_2|$   
C.  $C$  的离心率为  $\sqrt{13}$                       D. 当  $a = \sqrt{2}$  时，四边形  $NA_1MA_2$  的面积为  $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知平面向量  $\vec{a} = (x, 1), \vec{b} = (x-1, 2x)$ , 若  $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ , 则  $|\vec{a}| =$  \_\_\_\_\_

13. 若  $x = 2$  是函数  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$  的极值点，则  $f(0) =$  \_\_\_\_\_

14. 一个底面半径为 4cm，高为 9cm 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 \_\_\_\_\_ cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 已知函数  $f(x) = \cos(2x + \varphi) (0 \leq \varphi < \pi), f(0) = \frac{1}{2}$ .

(1)求  $\varphi$ ;

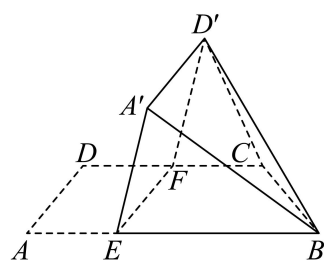
(2) 设函数  $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ , 求  $g(x)$  的值域和单调区间.

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 长轴长为 4.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过点  $(0, -2)$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 若  $\triangle OAB$  的面积为  $\sqrt{2}$ , 求  $|AB|$ .

17. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $F$  为  $CD$  的中点, 点  $E$  在  $AB$  上,  $EF \parallel AD$ ,  $AB = 3AD$ ,  $CD = 2AD$ , 将四边形  $EFDA$  沿  $EF$  翻折至四边形  $EFD'A'$ , 使得面  $EFD'A'$  与面  $EFCB$  所成的二面角为  $60^\circ$ .



(1) 证明:  $A'B \parallel$  平面  $CD'F$ ;

(2) 求面  $BCD'$  与面  $EFD'A'$  所成的二面角的正弦值.

18. 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$ , 其中  $0 < k < \frac{1}{3}$ .

(1) 证明:  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  存在唯一的极值点和唯一的零点;

(2) 设  $x_1, x_2$  分别为  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  的极值点和零点.

(i) 设函数  $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$ . 证明:  $g(t)$  在区间  $(0, x_1)$  单调递减;

(ii) 比较  $2x_1$  与  $x_2$  的大小, 并证明你的结论.

19. 甲、乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为  $P\left(\frac{1}{2} < p < 1\right)$ , 乙胜的概率为  $q$ ,  $p + q = 1$ , 且各球的胜负相互独立, 对正整数  $k \geq 2$ , 记  $p_k$  为打完  $k$  个球后甲比乙至少多得 2 分的概率,  $q_k$  为打完  $k$  个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求  $p_3, p_4$  (用  $p$  表示).

(2) 若  $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$ , 求  $p$ .

(3) 证明: 对任意正整数  $m$ ,  $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ .



1. C

【分析】由平均数的计算公式即可求解.

【详解】样本数据 2, 8, 14, 16, 20 的平均数为  $\frac{2+8+14+16+20}{5} = \frac{60}{5} = 12$ .

故选: C.

2. A

【分析】由复数除法即可求解.

【详解】因为  $z = 1 + i$ , 所以  $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+i-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ .

故选: A.

3. D

【分析】求出集合  $B$  后结合交集的定义可求  $A \cap B$ .

【详解】 $B = \{x \mid x^3 = x\} = \{0, -1, 1\}$ , 故  $A \cap B = \{0, 1\}$ ,

故选: D.

4. C

【分析】移项后转化为求一元二次不等式的解即可.

【详解】 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$  即为  $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$  即  $\begin{cases} (x+2)(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ , 故  $-2 \leq x < 1$ ,

故解集为  $[-2, 1)$ ,

故选: C.

5. A

【分析】由余弦定理  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$  直接计算求解即可.

【详解】由题意得  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times (1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

又  $0^\circ < A < 180^\circ$ , 所以  $A = 45^\circ$ .

故选: A

6. C

【分析】先由直线  $l_{BF}$  求出焦点  $F$  和  $P$  即抛物线  $C$  的方程, 进而依次得抛物线的准线方程和

点  $B$ , 从而可依次求出  $y_A$  和  $x_A$ , 再由焦半径公式即可得解.

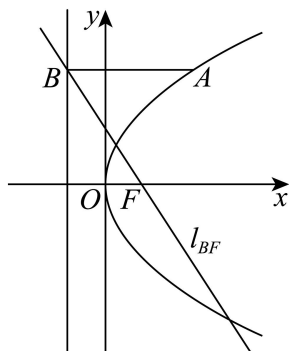
【详解】对  $l_{BF}: y = -2x + 2$ ，令  $y = 0$ ，则  $x = 1$ ，

所以  $F(1, 0)$ ， $p = 2$  即抛物线  $C: y^2 = 4x$ ，故抛物线的准线方程为  $x = -1$ ，

故  $B(-1, 4)$ ，则  $y_A = 4$ ，代入抛物线  $C: y^2 = 4x$  得  $x_A = 4$ 。

所以  $|AF| = |AB| = x_A + \frac{p}{2} = 4 + 1 = 5$ 。

故选：C



7. B

【分析】由等差数列前  $n$  项和公式结合题意列出关于首项  $a_1$  和公差  $d$  的方程求出首项  $a_1$  和公差  $d$ ，再由等差数列前  $n$  项和公式即可计算求解。

【详解】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，则由题可得 
$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 6 \\ 5a_1 + 10d = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

所以  $S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 5 + 15 \times (-3) = -15$ 。

故选：B。

8. D

【分析】利用二倍角余弦公式得  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ，则  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，最后再根据两角差的正弦公式即可得到答案。

【详解】 $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{5}$ ，

因为  $0 < \alpha < \pi$ ，则  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ，则  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ ，

则  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ 。

故选：D。

## 9. AD

【分析】对 A，根据等比数列通项公式和前  $n$  项和公式得到方程组，解出  $a_1, q$ ，再利用其通项公式和前  $n$  项和公式一一计算分析即可.

【详解】对 A，由题意得  $\begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \end{cases}$ ，结合  $q > 0$ ，解得  $\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} a_1 = 9 \\ q = -\frac{1}{3} \end{cases}$ （舍去），

故 A 正确；

对 B，则  $a_5 = a_1 q^4 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ ，故 B 错误；

对 C， $S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{4 \times \left(1 - \frac{1}{32}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}$ ，故 C 错误；

对 D， $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{3-n}$ ， $S_n = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 8 - 2^{-n+3}$ ，

则  $a_n + S_n = 2^{3-n} + 8 - 2^{3-n} = 8$ ，故 D 正确；

故选：AD.

## 10. ABD

【分析】对 A，根据奇函数特点即可判断；对 B，利用  $f(x) = -f(-x)$  代入求解即可；对 C，举反例  $f(-1) > 2$  即可；对 D，直接求导，根据极大值点判定方法即可判断.

【详解】对 A，因为  $f(x)$  定义在  $\mathbb{R}$  上奇函数，则  $f(0) = 0$ ，故 A 正确；

对 B，当  $x < 0$  时， $-x > 0$ ，则  $f(x) = -f(-x) = -\left[\left((-x)^2 - 3\right)e^{-x} + 2\right] = -\left(x^2 - 3\right)e^{-x} - 2$ ，故 B 正确；

对 C， $f(-1) = -(1-3)e-2 = 2(e-1) > 2$ ，故 C 错误；

对 D，当  $x < 0$  时， $f(x) = (3-x^2)e^{-x} - 2$ ，则  $f'(x) = -(3-x^2)e^{-x} - 2xe^{-x} = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$ ，

令  $f'(x) = 0$ ，解得  $x = -1$  或  $3$ （舍去），

当  $x \in (-\infty, -1)$  时， $f'(x) > 0$ ，此时  $f(x)$  单调递增，

当  $x \in (-1, 0)$  时， $f'(x) < 0$ ，此时  $f(x)$  单调递减，

则  $x = -1$  是  $f(x)$  极大值点，故 D 正确；

故选：ABD.

11. ACD

【分析】由平行四边形的性质判断 A；由  $F_1M \perp F_2M$  且  $|MO| = c$  结合  $M$  在渐近线上可求  $M$  的坐标，从而可判断 B 的正误，或者利用三角函数定义和余弦定理也可判断；由中线向量结合 B 的结果可得  $c^2 = 13a^2$ ，计算后可判断 C 的正误，或者利用  $\frac{|MA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{b}{2a} = \sqrt{3}$  并结合离心率变形公式即可判断；结合 BC 的结果求出面积后可判断 D 的正误.

【详解】不妨设渐近线为  $y = \frac{b}{a}x$ ， $M$  在第一象限， $N$  在第三象限，

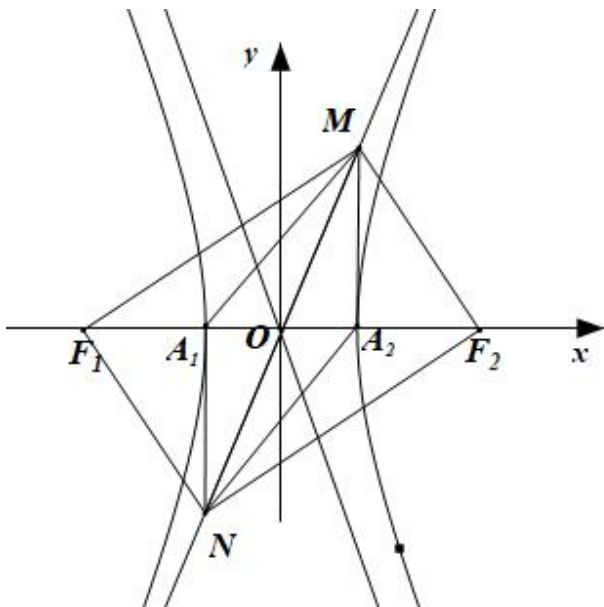
对于 A，由双曲线的对称性可得  $A_1MA_2N$  为平行四边形，故  $\angle A_1MA_2 = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ，

故 A 正确；

对于 B，方法一：因为  $M$  在以  $F_1F_2$  为直径的圆上，故  $F_1M \perp F_2M$  且  $|MO| = c$ ，

$$\text{设 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = c^2 \\ \frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{a} \end{cases}, \text{ 故 } \begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = b \end{cases}, \text{ 故 } MA_2 \perp A_1A_2,$$

由 A 得  $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$ ，故  $|MA_2| = |MA_1| \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  即  $|MA_1| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|MA_2|$ ，故 B 错误；

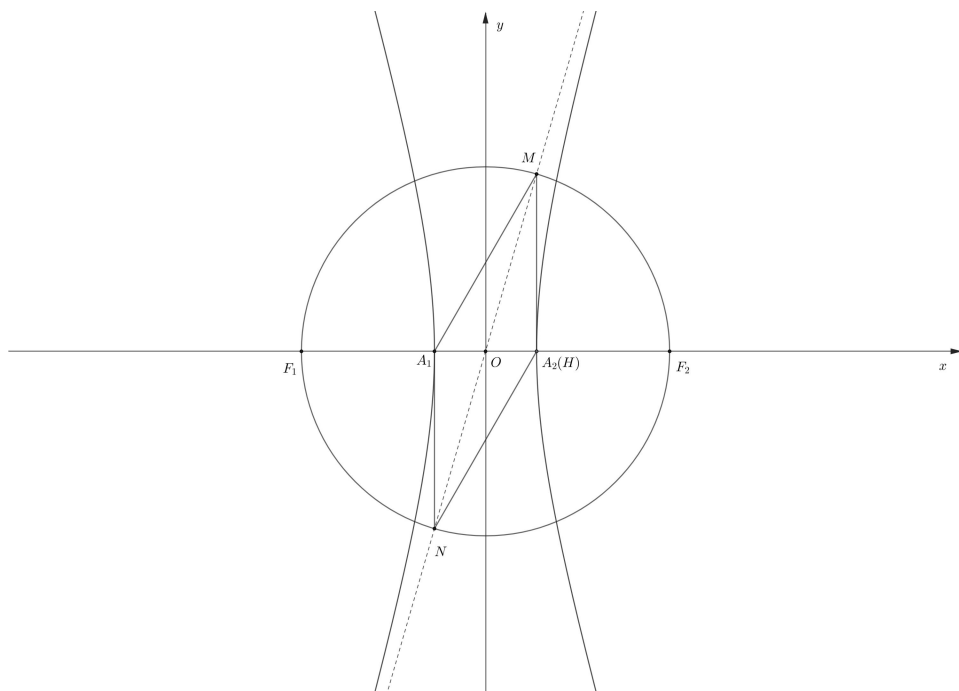


方法二：因为  $\tan \angle MOA_2 = \frac{b}{a}$ ，因为双曲线中， $c^2 = a^2 + b^2$ ，

则  $\cos \angle MOA_2 = \frac{a}{c}$ ，又因为以  $F_1F_2$  为直径的圆与  $C$  的一条渐近线交于  $M$ 、 $N$ ，则  $OM = c$ ，

则若过点  $M$  往  $x$  轴作垂线，垂足为  $H$ ，则  $|OH| = c \cdot \frac{a}{c} = a = |OA_2|$ ，则点  $H$  与  $A_2(H)$  重合，则

$MA_2 \perp x$  轴，则  $|MA_2| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ ，



方法三：在  $\triangle OMA_2$  利用余弦定理知， $|MA_2|^2 = |OM|^2 + |OA_2|^2 - 2|OM||OA_2|\cos\angle MOA_2$ ，

即  $|MA_2|^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \frac{a}{c} = b^2$ ，则  $|MA_2| = b$ ，

则  $\triangle A_1A_2M$  为直角三角形，且  $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$ ，则  $2|MA_2| = \sqrt{3}|MA_1|$ ，故 B 错误；

对于 C，方法一：因为  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2})$ ，故  $4\overrightarrow{MO}^2 = \overrightarrow{MA_1}^2 + 2\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_2}^2$ ，

由 B 可知  $|MA_2| = b, |MA_1| = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$ ，

故  $4c^2 = b^2 + \frac{4}{3}b^2 + 2 \times b \times \frac{2\sqrt{3}}{3}b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{3}b^2 = \frac{13}{3}(c^2 - a^2)$  即  $c^2 = 13a^2$ ，

故离心率  $e = \sqrt{13}$ ，故 C 正确；

方法二：因为  $\frac{|MA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{b}{2a} = \sqrt{3}$ ，则  $\frac{b}{a} = 2\sqrt{3}$ ，则  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$ ，故 C 正

确；

对于 D，当  $a = \sqrt{2}$  时，由 C 可知  $e = \sqrt{13}$ ，故  $c = \sqrt{26}$ ，

故  $b = 2\sqrt{6}$ ，故四边形  $NA_1MA_2$  为  $2S_{\triangle MA_1A_2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{3}$ ，

故 D 正确，

故选：ACD.

12.  $\sqrt{2}$

【分析】根据向量坐标化运算得  $\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$ ，再利用向量垂直的坐标表示得到方程，解出即可.

【详解】 $\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x)$ ，因为  $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$ ，则  $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ ，

则  $x+1-2x=0$ ，解得  $x=1$ .

则  $\vec{a}=(1,1)$ ，则  $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ .

故答案为： $\sqrt{2}$ .

13. -4

【分析】由题意得  $f'(2)=0$  即可求解  $a$ ，再代入即可求解.

【详解】由题意有  $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ ，

所以  $f'(x)=(x-a)(x-1)+(x-1)(x-2)+(x-a)(x-2)$ ，

因为 2 是函数  $f(x)$  极值点，所以  $f'(2)=2-a=0$ ，得  $a=2$ ，

当  $a=2$  时， $f'(x)=2(x-2)(x-1)+(x-2)^2=(x-2)(3x-4)$ ，

当  $x\in(-\infty,\frac{4}{3})$ ， $f'(x)>0$ ， $f(x)$  单调递增，当  $x\in(\frac{4}{3},2)$ ， $f'(x)<0$ ， $f(x)$  单调递减，

当  $x\in(2,+\infty)$ ， $f'(x)>0$ ， $f(x)$  单调递增，

所以  $x=2$  是函数  $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$  的极小值点，符合题意；

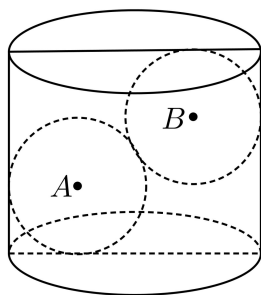
所以  $f(0)=-1\times(-2)\times(-a)=-2a=-4$ .

故答案为：-4.

14. 2.5

【分析】根据圆柱与球的性质以及球的体积公式可求出球的半径；

【详解】



圆柱的底面半径为  $4\text{cm}$ ，设铁球的半径为  $r$ ，且  $r < 4$ ，

由圆柱与球的性质知  $AB^2 = (2r)^2 = (8 - 2r)^2 + (9 - 2r)^2$ ，

即  $4r^2 - 68r + 145 = (2r - 5)(2r - 29) = 0$ ， $\because r < 4$ ，

$\therefore r = 2.5$ .

故答案为：2.5.

15. (1)  $\varphi = \frac{\pi}{3}$

(2) 答案见解析

【分析】(1) 直接由题意得  $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ ,  $(0 \leq \varphi < \pi)$ ，结合余弦函数的单调性即可得解；

(2) 由三角恒等变换得  $g(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，由此可得值域，进一步由整体代入法可得

函数  $g(x)$  的单调区间.

【详解】(1) 由题意  $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$ ,  $(0 \leq \varphi < \pi)$ ，所以  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ；

(2) 由 (1) 可知  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

所以  $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos 2x = \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

所以函数  $g(x)$  的值域为  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，

令  $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得  $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

令  $\pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得  $\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

所以函数  $g(x)$  的单调递减区间为  $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ ，

函数  $g(x)$  的单调递增区间为  $\left[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ .

16. (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2)  $\sqrt{5}$

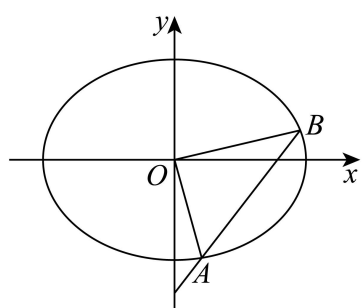
【分析】(1) 根据长轴长和离心率求出基本量后可得椭圆方程；

(2) 设出直线方程并联立椭圆方程后结合韦达定理用参数  $t$  表示面积后可求  $t$  的值，从而可求弦长.

【详解】(1) 因为长轴长为 4，故  $a=2$ ，而离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故  $c=\sqrt{2}$ ，

故  $b=\sqrt{2}$ ，故椭圆方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

(2)



由题设直线  $AB$  的斜率不为 0，故设直线  $l: x = t(y+2)$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

由  $\begin{cases} x = t(y+2) \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$  可得  $(t^2 + 2)y^2 + 4t^2y + 4t^2 - 4 = 0$ ，

故  $\Delta = 16t^4 - 4(t^2 + 2)(4t^2 - 4) = 4(8 - 4t^2) > 0$  即  $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ ，

且  $y_1 + y_2 = -\frac{4t^2}{t^2 + 2}$ ， $y_1y_2 = \frac{4t^2 - 4}{t^2 + 2}$ ，

故  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |2t| \times |y_1 - y_2| = |t| \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{|t| \sqrt{32 - 16t^2}}{t^2 + 2} = \sqrt{2}$ ，

解得  $t = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

故  $|AB| = \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+\frac{2}{3}} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{\frac{5}{3}} \times \frac{\sqrt{32-16 \times \frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}+2} = \sqrt{5}$ 。

17. (1) 证明见解析

(2)  $\frac{\sqrt{42}}{7}$

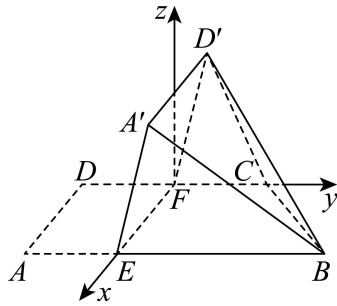
【分析】(1) 先应用线面平行判定定理得出  $A'E \parallel$  平面  $CD'F$  及  $EB \parallel$  平面  $CD'F$ ，

再应用面面平行判定定理得出平面  $A'EB \parallel$  平面  $CD'F$ ，进而得出线面平行；

(2) 建立空间直角坐标系，利用已知条件将点  $B, C, D', E, F$  的坐标表示出来，然后将平面  $BCD'$  及平面  $EFD'A'$  的法向量求出来，利用两个法向量的数量积公式可将两平面的夹角余弦值求出来，进而可求得其正弦值.

【详解】(1) 设  $AD=1$ ，所以  $AB=3, CD=2$ ，因为  $F$  为  $CD$  中点，所以  $DF=1$ ，因为  $EF \parallel AD$ ， $AB \parallel CD$ ，所以  $AEFD$  是平行四边形，所以  $AE \parallel DF$ ，所以  $A'E \parallel D'F$ ，  
因为  $D'F \subset$  平面  $CD'F, A'E \not\subset$  平面  $CD'F$ ，所以  $A'E \parallel$  平面  $CD'F$ ，  
因为  $FC \parallel EB, FC \subset$  平面  $CD'F, EB \not\subset$  平面  $CD'F$ ，所以  $EB \parallel$  平面  $CD'F$ ，  
又  $EB \cap A'E = E$ ， $EB, A'E \subset$  平面  $A'EB$ ，所以平面  $A'EB \parallel$  平面  $CD'F$ ，  
又  $A'B \subset$  平面  $A'EB$ ，所以  $A'B \parallel$  平面  $CD'F$ 。

(2)



因为  $\angle DAB = 90^\circ$ ，所以  $AD \perp AB$ ，又因为  $AB \parallel FC, EF \parallel AD$ ，所以  $EF \perp FC$ ，

以  $F$  为原点， $FE, FC$  以及垂直于平面  $BECF$  的直线分别为  $x, y, z$  轴，建立空间直角坐标系.

因为  $D'F \perp EF, CF \perp EF$ ，平面  $EFD'A'$  与平面  $EFCB$  所成二面角为  $60^\circ$ ，

所以  $\angle D'FC = 60^\circ$ 。

则  $B(1, 2, 0)$ ， $C(0, 1, 0)$ ， $D'\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $E(1, 0, 0)$ ， $F(0, 0, 0)$ ，.

所以  $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 0)$ ， $\overrightarrow{CD'} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{FE} = (1, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{FD'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

设平面  $BCD'$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CD'} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } z = 1, x = -\sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n} = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1).$$

设平面  $EFD'A'$  的法向量为  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{FE} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{FD'} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

令  $y = \sqrt{3}$ , 则  $z = -1, x = 0$ , 所以  $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, -1)$ .

$$\text{所以 } \cos \vec{m}, \vec{n} = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{0 + 3 - 1}{\sqrt{3+3+1} \times \sqrt{1+3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

所以平面  $BCD'$  与平面  $EFD'A'$  夹角的正弦值为  $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{7}$ .

18. (1) 证明见解析;

(2) (i) 证明见解析; (ii)  $2x_1 > x_2$ , 证明见解析.

【分析】(1) 先由题意求得  $f'(x) = x^2 \left( \frac{1}{1+x} - 3k \right)$ , 接着构造函数  $g(x) = \frac{1}{1+x} - 3k, x > 0$ , 利用导数工具研究函数  $g(x)$  的单调性和函数值情况, 从而得到函数的单调性, 进而得证函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上存在唯一极值点; 再结合  $f(0) = 0$  和  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x)$  的正负情况即可得证  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上存在唯一零点;

(2) (i) 由 (1)  $x_1 + 1 = \frac{1}{3k}$  和  $g'(t) = f'(x_1 + t) - f'(x_1 - t)$  结合 (1) 中所得导函数  $f'(x_1)$  计算得到  $g'(t) = -t \left[ \frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \right]$ , 再结合  $t \in (0, x_1)$  得  $g'(t) < 0$  即可得证;

(ii) 由函数  $g(t)$  在区间  $(0, x_1)$  上单调递减得到  $0 > f(2x_1)$ , 再结合  $f(x_2) = 0$ , 和函数  $f(x)$  的单调性以及函数值的情况即可得证.

【详解】(1) 由题得  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{x^2}{1+x} - 3kx^2 = x^2 \left( \frac{1}{1+x} - 3k \right)$ ,

因为  $x \in (0, +\infty)$ , 所以  $x^2 > 0$ , 设  $g(x) = \frac{1}{1+x} - 3k, x > 0$ ,

则  $g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

$g(0) = 1 - 3k > 0$ , 令  $g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3k} - 1$ ,

所以当  $x \in (0, x_0)$  时,  $g(x) > 0$ , 则  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $g(x) < 0$ , 则  $f'(x) < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减,

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上存在唯一极值点,

对函数  $y = \ln(1+x) - x$  有  $y' = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

所以  $y = \ln(1+x) - x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

所以  $y = \ln(1+x) - x < y|_{x=0} = 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

又因为  $f(0) = 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$  时  $\frac{1}{2}x^2 - kx^3 = \frac{1}{2}x^2(1 - 2kx) < 0$ ,

所以  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x) < 0$ ,

所以存在唯一  $x_2 \in (0, +\infty)$  使得  $f(x_2) = 0$ , 即  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上存在唯一零点.

(2) (i) 由 (1) 知  $x_1 = \frac{1}{3k} - 1$ , 则  $x_1 + 1 = \frac{1}{3k}$ ,  $f'(x) = x^2 \left( \frac{1}{1+x} - 3k \right)$ ,

则  $g'(t) = f'(x_1 + t) - f'(x_1 - t) = (x_1 + t)^2 \left( \frac{1}{x_1 + t + 1} - 3k \right) - (x_1 - t)^2 \left( \frac{1}{x_1 - t + 1} - 3k \right)$

$= (x_1 + t)^2 \left( \frac{1}{x_1 + t + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right) - (x_1 - t)^2 \left( \frac{1}{x_1 - t + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right)$

$= \frac{-t(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} - \frac{t(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} = -t \left[ \frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \right]$

$= -t \left[ \frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} \right],$

因为  $t \in (0, x_1)$ , 所以  $x_1 - t + 1 > 0$ , 所以  $\frac{(x_1 + t)^2}{(x_1 + t + 1)(x_1 + 1)} + \frac{(x_1 - t)^2}{(x_1 - t + 1)(x_1 + 1)} > 0$ ,

所以  $g'(t) < 0$ , 所以函数  $g(t)$  在区间  $(0, x_1)$  上单调递减;

(ii)  $2x_1 > x_2$ , 证明如下:

由 (i) 知: 函数  $g(t)$  在区间  $(0, x_1)$  上单调递减,

所以  $g(0) > g(x_1)$  即  $0 > f(2x_1)$ , 又  $f(x_2) = 0$ ,

由 (1) 可知  $f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减,  $x_2 \in (x_0, +\infty)$ , 且对任意  $x \in (0, x_2)$   $f(x) > 0$ ,

所以  $2x_1 > x_2$ .

19. (1)  $p_3 = p^3$ ,  $p_4 = p^3(4-3p)$

(2)  $p = \frac{2}{3}$

(3) 证明过程见解析

【分析】(1) 直接由二项分布概率计算公式即可求解；

(2) 由题意  $q_3 = q^3, q_4 = q^3(4-3q)$ ，联立  $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$ ， $p + q = 1$  即可求解；

(3) 首先  $p_{2m} - p_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m$ ， $p_{2m+2} - p_{2m+1} = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m$ ，同理有  $q_{2m} - q_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m$ ，

$q_{2m+2} - q_{2m+1} = C_{2m+1}^m q^{m+2} p^m$ ，作差有  $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}$ ，另一方面

$$p_{2m+2} - p_{2m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot p \left( p - \frac{m}{2m+1} \right), \text{ 且同理有}$$

$$q_{2m+2} - q_{2m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot q \left( q - \frac{m}{2m+1} \right), \text{ 作差能得到 } p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}, \text{ 由此即可}$$

得证.

【详解】(1)  $p_3$  为打完 3 个球后甲比乙至少多得两分的概率，故只能甲胜三场，

故所求为  $p_3 = C_3^3 (1-p)^0 p^3 = p^3$ ，

$p_4$  为打完 4 个球后甲比乙至少多得两分的概率，故甲胜三场或四场，

故所求为  $p_4 = C_4^3 (1-p)^1 p^3 + C_4^4 (1-p)^0 p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p)$ ；

(2) 由 (1) 得  $p_3 = p^3$ ， $p_4 = p^3(4-3p)$ ，同理  $q_3 = q^3, q_4 = q^3(4-3q)$ ，

若  $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$ ， $p + q = 1$ ，

$$\text{则 } \frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{p^3(4-3p) - p^3}{q^3(4-3q) - q^3} = \frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)} = \frac{p^3 q}{q^3 p} = \left( \frac{p}{q} \right)^2 = 4,$$

由于  $0 < p, q < 1$ ，所以  $p = 2q = 2(1-p) > 0$ ，解得  $p = \frac{2}{3}$ ；

(3) 我们有

$$\begin{aligned} p_{2m} - p_{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m+1-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k-1} p^{2m+1-k} q^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} - \sum_{k=0}^{m-2} C_{2m}^k p^{2m-k} q^{k+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m.$$

以及

$$\begin{aligned} p_{2m+2} - p_{2m+1} &= \sum_{k=0}^m C_{2m+2}^k p^{2m+2-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k = \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k p^{2m+2-k} q^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m + (p-1) \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^{k-1} p^{2m+2-k} q^k + C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} + C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m+1}^k p^{2m+1-k} q^{k+1} = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m. \end{aligned}$$

至此我们得到  $p_{2m} - p_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m$ ,  $p_{2m+2} - p_{2m+1} = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m$ , 同理有

$$q_{2m} - q_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m, \quad q_{2m+2} - q_{2m+1} = C_{2m+1}^m q^{m+2} p^m.$$

故  $p_{2m} - p_{2m+1} = C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m = p \cdot (C_{2m}^{m-1} p^m q^m) > q \cdot (C_{2m}^{m-1} p^m q^m) = C_{2m}^{m-1} q^{m+1} p^m = q_{2m} - q_{2m+1}$ , 即

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}.$$

另一方面, 由于

$$p_{2m+2} - p_{2m} = (p_{2m+2} - p_{2m+1}) - (p_{2m} - p_{2m+1}) = C_{2m+1}^m p^{m+2} q^m - C_{2m}^{m-1} p^{m+1} q^m = p^m q^m \cdot p \left( p \cdot C_{2m+1}^m - C_{2m}^{m-1} \right)$$

$$= p^m q^m \cdot p \left( p \cdot \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} \right) = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot p \left( p - \frac{m}{2m+1} \right)$$

$$\text{且同理有 } q_{2m+2} - q_{2m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} p^m q^m \cdot q \left( q - \frac{m}{2m+1} \right).$$

故结合

$$p \left( p - \frac{m}{2m+1} \right) - q \left( q - \frac{m}{2m+1} \right) = (p-q) \left( p+q - \frac{m}{2m+1} \right) \neq (p-q) \left( p - \frac{m}{2m+1} \right) = \frac{m+1}{2m+1} (p-q) > 0,$$

就能得到  $p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m}$ , 即  $p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ , 证毕.