

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = 5 + i$ ，则 $i(\bar{z} + z) =$ ()

- A. $10i$ B. $2i$ C. 10 D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】结合共轭复数与复数的基本运算直接求解。

【详解】由 $z = 5 + i \Rightarrow \bar{z} = 5 - i, z + \bar{z} = 10$ ，则 $i(\bar{z} + z) = 10i$ 。

故选：A

2. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$ ，则 $\partial_A(A \cap B) =$ ()

- A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由集合 B 的定义求出 B ，结合交集与补集运算即可求解。

【详解】因为 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$ ，所以 $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$ ，

则 $A \cap B = \{1, 4, 9\}$ ， $\partial_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$

故选：D

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x-5y$ 的最小值为 ()

A. 5

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

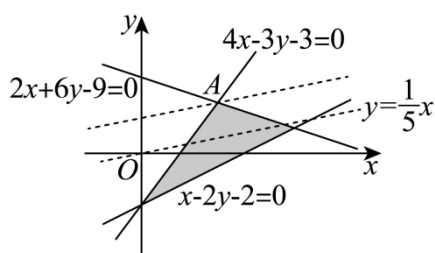
D. $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出可行域后，利用 z 的几何意义计算即可得.

【详解】实数 x, y 满足 $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，作出可行域如图：



由 $z = x-5y$ 可得 $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ ，

即 z 的几何意义为 $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ 的截距的 $-\frac{1}{5}$ ，

则该直线截距取最大值时， z 有最小值，

此时直线 $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ 过点 A，

联立 $\begin{cases} 4x-3y-3=0 \\ 2x+6y-9=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$ ，即 $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ，

则 $z_{\min} = \frac{3}{2} - 5 \times 1 = -\frac{7}{2}$ 。

故选：D.

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_5 = S_{10}$ ， $a_5 = 1$ ，则 $a_1 =$ ()

A. -2

B. $\frac{7}{3}$

C. 1

D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】由 $S_5 = S_{10}$ 结合等差中项的性质可得 $a_8 = 0$ ，即可计算出公差，即可得 a_1 的值.

【详解】由 $S_{10} - S_5 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a_8 = 0$ ，则 $a_8 = 0$ ，

则等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{a_8 - a_5}{3} = -\frac{1}{3}$ ，故 $a_1 = a_5 - 4d = 1 - 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$ 。

故选：B.

5. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上、下焦点分别为 $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ ，点 $P(-6, 4)$ 在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（ ）

A. 4

B. 3

C. 2

D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由焦点坐标可得焦距 $2c$ ，结合双曲线定义计算可得 $2a$ ，即可得离心率。

【详解】由题意， $F_1(0, -4)$ 、 $F_2(0, 4)$ 、 $P(-6, 4)$ ，

$$\text{则 } |F_1F_2| = 2c = 8, \quad |PF_1| = \sqrt{6^2 + (4+4)^2} = 10, \quad |PF_2| = \sqrt{6^2 + (4-4)^2} = 6,$$

$$\text{则 } 2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4, \quad \text{则 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{4} = 2.$$

故选：C.

6. 设函数 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为（ ）

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】借助导数的几何意义计算可得其在点 $(0, 1)$ 处的切线方程，即可得其与坐标轴交点坐标，即可得其面积。

$$\text{【详解】 } f'(x) = \frac{(e^x + 2\cos x)(1+x^2) - (e^x + 2\sin x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\text{则 } f'(0) = \frac{(e^0 + 2\cos 0)(1+0) - (e^0 + 2\sin 0) \times 0}{(1+0)^2} = 3,$$

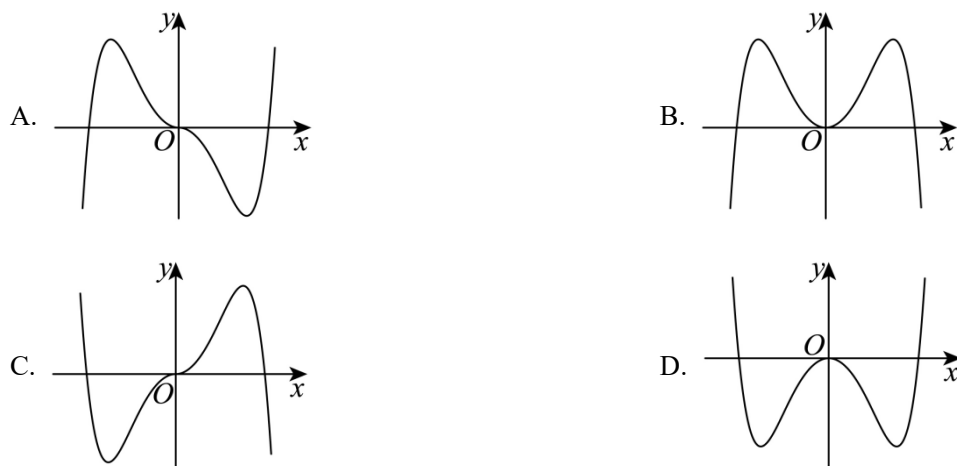
即该切线方程为 $y - 1 = 3x$ ，即 $y = 3x + 1$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = 1$ ，令 $y = 0$ ，则 $x = -\frac{1}{3}$ ，

故该切线与两坐标轴所围成的三角形面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{6}$.

故选：A.

7. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的大致图像为 ()



【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入 $x=1$ 可得 $f(1) > 0$ ，可排除 D.

【详解】 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x)\sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x = f(x)$,

又函数定义域为 $[-2.8, 2.8]$ ，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

又 $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right)\sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right)\sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} > 0$,

故可排除 D.

故选：B.

8. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ ，则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $2\sqrt{3} + 1$ B. $2\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1 - \sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ 弦化切求得 $\tan \alpha$ ，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$, $\Rightarrow \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1$,

故选: B.

9. 已知向量 $\vec{a} = (x+1, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则 ()

A. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的必要条件

B. “ $x = -3$ ”是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的必要条件

C. “ $x = 0$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的充分条件

D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ”是“ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ”的充分条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量垂直和平行的坐标表示即可得到方程, 解出即可.

【详解】对 A, 当 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 时, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

所以 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 -3 , 即必要性不成立, 故 A 错误;

对 C, 当 $x = 0$ 时, $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 2)$, 故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

所以 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 即充分性成立, 故 C 正确;

对 B, 当 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 时, 则 $2(x+1) = x^2$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 即必要性不成立, 故 B 错误;

对 D, 当 $x = -1 + \sqrt{3}$ 时, 不满足 $2(x+1) = x^2$, 所以 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 不成立, 即充分性不立, 故 D 错误.

故选: C.

10. 设 α 、 β 是两个平面, m 、 n 是两条直线, 且 $\alpha \cap \beta = m$. 下列四个命题:

①若 $m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \parallel \beta$

②若 $m \perp n$, 则 $n \perp \alpha, n \perp \beta$

③若 $n \parallel \alpha$, 且 $n \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$

④若 n 与 α 和 β 所成的角相等, 则 $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ()

A. ①③

B. ②④

C. ①②③

D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当 $n \subset \alpha$ ，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \beta$ ，则 $n \parallel \beta$ ，

当 $n \subset \beta$ ，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ，则 $n \parallel \alpha$ ，

当 n 既不在 α 也不在 β 内，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha, m \subset \beta$ ，则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$ ，故①正确；

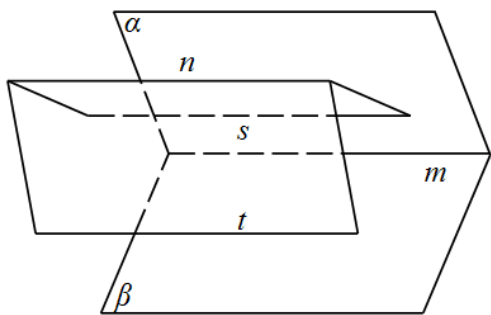
对②，若 $m \perp n$ ，则 n 与 α, β 不一定垂直，故②错误；

对③，过直线 n 分别作两平面与 α, β 分别相交于直线 s 和直线 t ，

因为 $n \parallel \alpha$ ，过直线 n 的平面与平面 α 的交线为直线 s ，则根据线面平行的性质定理知 $n \parallel s$ ，

同理可得 $n \parallel t$ ，则 $s \parallel t$ ，因为 $s \subset$ 平面 β ， $t \subset$ 平面 β ，则 $s \parallel$ 平面 β ，

因为 $s \subset$ 平面 α ， $\alpha \cap \beta = m$ ，则 $s \parallel m$ ，又因为 $n \parallel s$ ，则 $m \parallel n$ ，故③正确；



对④，若 $\alpha \cap \beta = m$ ， n 与 α 和 β 所成的角相等，如果 $n \parallel \alpha, n \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$ ，故④错误；

综上所述只有①③正确，

故选：A.

11. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c ，若 $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则 $\sin A + \sin C =$ ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理得 $\sin A \sin C = \frac{1}{3}$ ，再利用余弦定理有 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$ ，再利用正弦定理得到 $\sin^2 A + \sin^2 C$ 的值，最后代入计算即可.

【详解】因为 $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则由正弦定理得 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$.

由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$,

即: $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$, 根据正弦定理得 $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}$,

所以 $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}$,

因为 A, C 为三角形内角, 则 $\sin A + \sin C > 0$, 则 $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选: C.

12. 已知 b 是 a, c 的等差中项, 直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合等差数列性质将 c 代换, 求出直线恒过的定点, 采用数形结合法即可求解.

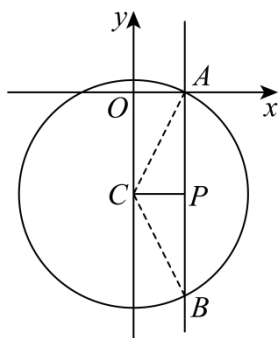
【详解】因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $2b = a + c$, $c = 2b - a$, 代入直线方程 $ax + by + c = 0$ 得

$$ax + by + 2b - a = 0, \text{ 即 } a(x-1) + b(y+2) = 0, \text{ 令 } \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases},$$

故直线恒过 $(1, -2)$, 设 $P(1, -2)$, 圆化为标准方程得: $C: x^2 + (y+2)^2 = 5$,

设圆心为 C , 画出直线与圆的图形, 由图可知, 当 $PC \perp AB$ 时, $|AB|$ 最小,

$$|PC| = 1, |AC| = |r| = \sqrt{5}, \text{ 此时 } |AB| = 2|AP| = 2\sqrt{AC^2 - PC^2} = 2\sqrt{5-1} = 4.$$



故选: C

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$ 的展开式中, 各项系数的最大值是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】先设展开式中第 $r+1$ 项系数最大，则根据通项公式有
$$\begin{cases} C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$$
，进而求出 r 即可

求解.

【详解】由题展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} x^r$ ， $0 \leq r \leq 10$ 且 $r \in \mathbf{Z}$ ，

设展开式中第 $r+1$ 项系数最大，则
$$\begin{cases} C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-r} \\ C_{10}^r \left(\frac{1}{3}\right)^{10-r} \geq C_{10}^{r-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-r} \end{cases}$$
，

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq \frac{29}{4} \\ r \leq \frac{33}{4} \end{cases}, \text{ 即 } \frac{29}{4} \leq r \leq \frac{33}{4}, \text{ 又 } r \in \mathbf{Z}, \text{ 故 } r = 8,$$

所以展开式中系数最大的项是第 9 项，且该项系数为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.

故答案为：5.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为 r_1 和 r_2 ，母线长分别为 $2(r_2 - r_1)$ 和 $3(r_2 - r_1)$ ，则两个圆台

的体积之比 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】

【分析】先根据已知条件和圆台结构特征分别求出两圆台的高，再根据圆台的体积公式直接代入计算即可得解.

【详解】由题可得两个圆台的高分别为 $h_{\text{甲}} = \sqrt{[2(r_1 - r_2)]^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{3}(r_1 - r_2)$ ，

$$h_{\text{乙}} = \sqrt{[3(r_1 - r_2)]^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{2}(r_1 - r_2),$$

$$\text{所以 } \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}(S_2 + S_1 + \sqrt{S_2 S_1})h_{\text{甲}}}{\frac{1}{3}(S_2 + S_1 + \sqrt{S_2 S_1})h_{\text{乙}}} = \frac{h_{\text{甲}}}{h_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{3}(r_1 - r_2)}{2\sqrt{2}(r_1 - r_2)} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

15. 已知 $a > 1$, $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

【答案】64

【解析】

【分析】将 $\log_8 a, \log_a 4$ 利用换底公式转化成 $\log_2 a$ 来表示即可求解.

【详解】由题 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 整理得 $(\log_2 a)^2 - 5\log_2 a - 6 = 0$,

$\Rightarrow \log_2 a = -1$ 或 $\log_2 a = 6$, 又 $a > 1$,

所以 $\log_2 a = 6 = \log_2 2^6$, 故 $a = 2^6 = 64$

故答案为: 64.

16. 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中不放回地随机抽取 3 次, 每次取 1 个球. 记 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}$ 的概率是_____.

【答案】 $\frac{7}{15}$

【解析】

【分析】根据排列可求基本事件的总数, 设前两个球的号码为 a, b , 第三个球的号码为 c , 则 $a + b - 3 \leq 2c \leq a + b + 3$, 就 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.

【详解】从 6 个不同的球中不放回地抽取 3 次, 共有 $A_6^3 = 120$ 种,

设前两个球的号码为 a, b , 第三个球的号码为 c , 则 $\left| \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$,

故 $|2c - (a+b)| \leq 3$, 故 $-3 \leq 2c - (a+b) \leq 3$,

故 $a + b - 3 \leq 2c \leq a + b + 3$,

若 $c = 1$, 则 $a + b \leq 5$, 则 (a, b) 为: $(2, 3), (3, 2)$, 故有 2 种,

若 $c = 2$ ，则 $1 \leq a + b \leq 7$ ，则 (a, b) 为： $(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4),$

$(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 3)$ ，故有 10 种，

当 $c = 3$ ，则 $3 \leq a + b \leq 9$ ，则 (a, b) 为：

$(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5),$

$(2, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (5, 4),$

故有 16 种，

当 $c = 4$ ，则 $5 \leq a + b \leq 11$ ，同理有 16 种，

当 $c = 5$ ，则 $7 \leq a + b \leq 13$ ，同理有 10 种，

当 $c = 6$ ，则 $9 \leq a + b \leq 15$ ，同理有 2 种，

共 m 与 n 的差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}$ 时不同的抽取方法总数为 $2(2 + 10 + 16) = 56$ ，

故所求概率为 $\frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ 。

故答案为： $\frac{7}{15}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17 题~第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取 150 件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

（1）填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		

乙车间		
-----	--	--

能否有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有 99% 的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$ ，设 $\bar{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率.如果

$$\bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \text{ 则认为该工厂产品的优级品率提高了, 根据抽取的 150 件产品的数据, 能否认为}$$

为生产线智能化升级改造后, 该工厂产品的优级品率提高了? ($\sqrt{150} \approx 12.247$)

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1) 答案见详解

(2) 答案见详解

【解析】

【分析】(1) 根据题中数据完善列联表, 计算 K^2 , 并与临界值对比分析;

(2) 用频率估计概率可得 $\bar{p} = 0.64$, 根据题意计算 $p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, 结合题意分析判断.

【小问 1 详解】

根据题意可得列联表:

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

$$\text{可得 } K^2 = \frac{150(26 \times 30 - 24 \times 70)^2}{50 \times 100 \times 96 \times 54} = \frac{75}{16} = 4.6875,$$

因为 $3.841 < 4.6875 < 6.635$,

所以有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异，没有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异.

【小问2详解】

由题意可知：生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品的频率为 $\frac{96}{150} = 0.64$,

用频率估计概率可得 $\bar{p} = 0.64$,

又因为升级改造前该工厂产品的优级品率 $p = 0.5$,

$$\text{则 } p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.5 + 1.65\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{150}} \approx 0.5 + 1.65 \times \frac{0.5}{12.247} \approx 0.568,$$

$$\text{可知 } \bar{p} > p + 1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

所以可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $4S_n = 3a_n + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

【答案】(1) $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$

(2) $T_n = (2n-1) \cdot 3^n + 1$

【解析】

【分析】(1) 利用退位法可求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 利用错位相减法可求 T_n .

【小问1详解】

当 $n=1$ 时， $4S_1 = 4a_1 = 3a_1 + 4$ ，解得 $a_1 = 4$.

当 $n \geq 2$ 时， $4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4$ ，所以 $4S_n - 4S_{n-1} = 4a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$ 即 $a_n = -3a_{n-1}$,

而 $a_1 = 4 \neq 0$ ，故 $a_n \neq 0$ ，故 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -3$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以4为首项，-3为公比的等比数列，

所以 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$.

【小问 2 详解】

$$b_n = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 4 \cdot (-3)^{n-1} = 4n \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{所以 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = 4 \cdot 3^0 + 8 \cdot 3^1 + 12 \cdot 3^2 + \dots + 4n \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{故 } 3T_n = 4 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3^3 + \dots + 4n \cdot 3^n$$

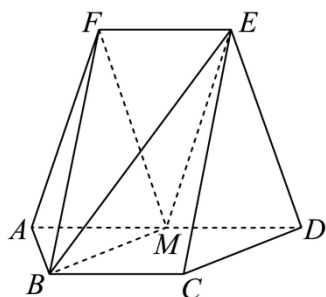
$$\text{所以 } -2T_n = 4 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} - 4n \cdot 3^n$$

$$= 4 + 4 \cdot \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - 4n \cdot 3^n = 4 + 2 \cdot 3 \cdot (3^{n-1} - 1) - 4n \cdot 3^n$$

$$= (2 - 4n) \cdot 3^n - 2,$$

$$\therefore T_n = (2n - 1) \cdot 3^n + 1.$$

19. 如图，在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，
 $BC \parallel AD, EF \parallel AD$ ， $AD = 4, AB = BC = EF = 2$ ， $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$ ， M 为 AD 的中点.



(1) 证明： $BM \parallel$ 平面 CDE ；

(2) 求二面角 $F-BM-E$ 的正弦值.

【答案】(1) 证明见详解；

$$(2) \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

【解析】

【分析】(1) 结合已知易证四边形 $BCDM$ 为平行四边形，可证 $BM \parallel CD$ ，进而得证；

(2) 作 $BO \perp AD$ 交 AD 于 O ，连接 OF ，易证 OB, OD, OF 三垂直，采用建系法结合二面角夹角余弦公式即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $BC \parallel AD, EF = 2, AD = 4, M$ 为 AD 的中点，所以 $BC \parallel MD, BC = MD$ ，

四边形 $BCDM$ 为平行四边形, 所以 $BM \parallel CD$, 又因为 $BM \not\subset$ 平面 CDE ,
 $CD \subset$ 平面 CDE , 所以 $BM \parallel$ 平面 CDE ;

【小问 2 详解】

如图所示, 作 $BO \perp AD$ 交 AD 于 O , 连接 OF ,

因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形, $BC \parallel AD$, $AD = 4$, $AB = BC = 2$, 所以 $CD = 2$,

结合 (1) $BCDM$ 为平行四边形, 可得 $BM = CD = 2$, 又 $AM = 2$,

所以 $\triangle ABM$ 为等边三角形, O 为 AM 中点, 所以 $OB = \sqrt{3}$,

又因为四边形 $ADEF$ 为等腰梯形, M 为 AD 中点, 所以 $EF = MD$, $EF \parallel MD$,

四边形 $EFMD$ 为平行四边形, $FM = ED = AF$,

所以 $\triangle AFM$ 为等腰三角形, $\triangle ABM$ 与 $\triangle AFM$ 底边上中点 O 重合, $OF \perp AM$, $OF = \sqrt{AF^2 - AO^2} = 3$,

因为 $OB^2 + OF^2 = BF^2$, 所以 $OB \perp OF$, 所以 OB, OD, OF 互相垂直,

以 OB 方向为 x 轴, OD 方向为 y 轴, OF 方向为 z 轴, 建立 $O-xyz$ 空间直角坐标系,

$F(0, 0, 3)$, $B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $M(0, 1, 0)$, $E(0, 2, 3)$, $\overrightarrow{BM} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{BF} = (-\sqrt{3}, 0, 3)$,

$\overrightarrow{BE} = (-\sqrt{3}, 2, 3)$, 设平面 BFM 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

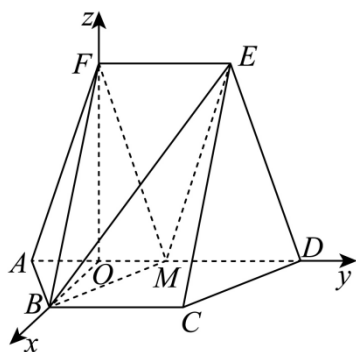
平面 EMB 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ -\sqrt{3}x_1 + 3z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_1 = \sqrt{3}, \text{ 得 } y_1 = 3, z_1 = 1, \text{ 即 } \vec{m} = (\sqrt{3}, 3, 1),$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \\ -\sqrt{3}x_2 + 2y_2 + 3z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x_2 = \sqrt{3}, \text{ 得 } y_2 = 3, z_2 = -1,$$

$$\text{即 } \vec{n} = (\sqrt{3}, 3, -1), \cos \angle \vec{m}, \vec{n} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{11}{13}, \text{ 则 } \sin \angle \vec{m}, \vec{n} = \frac{4\sqrt{3}}{13},$$

故二面角 $F-BM-E$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$.



20. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F ，点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在 C 上，且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4, 0)$ 的直线与 C 交于 A, B 两点， N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q ，证明： $AQ \perp y$ 轴.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 设 $F(c, 0)$ ，根据 M 的坐标及 $MF \perp x$ 轴可求基本量，故可求椭圆方程.

(2) 设 $AB: y = k(x - 4)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，联立直线方程和椭圆方程，用 A, B 的坐标表示 $y_1 - y_Q$ ，结合韦达定理化简前者可得 $y_1 - y_Q = 0$ ，故可证 $AQ \perp y$ 轴.

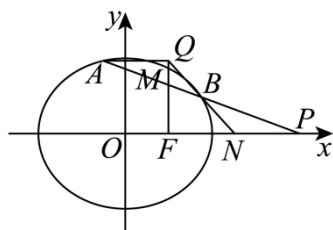
【小问 1 详解】

设 $F(c, 0)$ ，由题设有 $c = 1$ 且 $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$ ，故 $\frac{a^2 - 1}{a} = \frac{3}{2}$ ，故 $a = 2$ ，故 $b = \sqrt{3}$ ，

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

【小问 2 详解】

直线 AB 的斜率必定存在，设 $AB: y = k(x - 4)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，



$$\text{由} \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = k(x-4) \end{cases} \text{可得} (3+4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{故} \Delta = 1024k^4 - 4(3+4k^2)(64k^2 - 12) > 0, \text{ 故} -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2},$$

$$\text{又} x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{64k^2 - 12}{3+4k^2},$$

$$\text{而} N\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 故直线} BN: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ 故} y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-3y_2}{2x_2 - 5},$$

$$\text{所以} y_1 - y_Q = y_1 + \frac{3y_2}{2x_2 - 5} = \frac{y_1 \times (2x_2 - 5) + 3y_2}{2x_2 - 5}$$

$$= \frac{k(x_1 - 4) \times (2x_2 - 5) + 3k(x_2 - 4)}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{2x_2 - 5} = k \frac{2 \times \frac{64k^2 - 12}{3+4k^2} - 5 \times \frac{32k^2}{3+4k^2} + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 24 + 32k^2}{2x_2 - 5} = 0,$$

故 $y_1 = y_Q$, 即 $AQ \perp y$ 轴.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

- (1) 设直线方程，设交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ；
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x （或 y ）的一元二次方程，注意 Δ 的判断；
- (3) 列出韦达定理；
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为 $x_1 + x_2$ 、 x_1x_2 （或 $y_1 + y_2$ 、 y_1y_2 ）的形式；
- (5) 代入韦达定理求解.

21. 已知函数 $f(x) = (1-ax)\ln(1+x) - x$.

- (1) 当 $a = -2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；
- (2) 当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】(1) 极小值为 0，无极大值.

$$(2) a \leq -\frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 求出函数的导数，根据导数的单调性和零点可求函数的极值.

(2) 求出函数的二阶导数，就 $a \leq -\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 、 $a \geq 0$ 分类讨论后可得参数的取值范围.

【小问 1 详解】

当 $a = -2$ 时， $f(x) = (1+2x)\ln(1+x) - x$ ，

$$\text{故 } f'(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1+2x}{1+x} - 1 = 2\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + 1,$$

因为 $y = 2\ln(1+x)$, $y = -\frac{1}{1+x} + 1$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数，

故 $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数，而 $f'(0) = 0$ ，

故当 $-1 < x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值且极小值 $f(0) = 0$ ，无极大值.

【小问 2 详解】

$$f'(x) = -a\ln(1+x) + \frac{1-ax}{1+x} - 1 = -a\ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}, x > 0,$$

$$\text{设 } s(x) = -a\ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}, x > 0,$$

$$\text{则 } s'(x) = \frac{-a}{x+1} - \frac{(a+1)}{(1+x)^2} = -\frac{a(x+1)+a+1}{(1+x)^2} = -\frac{ax+2a+1}{(1+x)^2},$$

当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时， $s'(x) > 0$ ，故 $s(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

故 $s(x) > s(0) = 0$ ，即 $f'(x) > 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，故 $f(x) \geq f(0) = 0$.

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时，当 $0 < x < -\frac{2a+1}{a}$ 时， $s'(x) < 0$ ，

故 $s(x)$ 在 $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$ 上为减函数，故在 $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$ 上 $s(x) < s(0)$ ，

即在 $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$ 上 $f'(x) < 0$ 即 $f(x)$ 为减函数,

故 $\left(0, -\frac{2a+1}{a}\right)$ 上 $f(x) < f(0) = 0$, 不合题意, 舍.

当 $a \geq 0$, 此时 $s'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

同理可得在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x) < f(0) = 0$ 恒成立, 不合题意, 舍;

综上, $a \leq -\frac{1}{2}$.

【点睛】思路点睛: 导数背景下不等式恒成立问题, 往往需要利用导数判断函数单调性, 有时还需要对导数进一步利用导数研究其符号特征, 处理此类问题时注意利用范围端点的性质来确定如何分类.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: \begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 2$, 求 a 的值.

【答案】(1) $y^2 = 2x + 1$

(2) $a = \frac{3}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$ 可得 C 的直角方程.

(2) 将直线的新的参数方程代入 C 的直角方程,

法 1: 结合参数 s 的几何意义可得关于 a 的方程, 从而可求参数 a 的值;

法 2: 将直线的直角方程与曲线的直角方程联立, 结合弦长公式可求 a 的值.

【小问 1 详解】

由 $\rho = \rho \cos \theta + 1$, 将 $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$ 代入 $\rho = \rho \cos \theta + 1$,

故可得 $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$ ，两边平方后可得曲线的直角坐标方程为 $y^2 = 2x + 1$ 。

【小问 2 详解】

对于直线 l 的参数方程消去参数 t ，得直线的普通方程为 $y = x + a$ 。

法 1：直线 l 的斜率为 1，故倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，

$$\text{故直线的参数方程可设为} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y = a + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}, s \in \mathbf{R}.$$

将其代入 $y^2 = 2x + 1$ 中得 $s^2 + 2\sqrt{2}(a-1)s + 2(a^2 - 1) = 0$

设 A, B 两点对应的参数分别为 s_1, s_2 ，则 $s_1 + s_2 = -2\sqrt{2}(a-1)$, $s_1 s_2 = 2(a^2 - 1)$ ，

且 $\Delta = 8(a-1)^2 - 8(a^2 - 1) = 16 - 16a > 0$ ，故 $a < 1$ ，

$$\therefore |AB| = |s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1 s_2} = \sqrt{8(a-1)^2 - 8(a^2 - 1)} = 2, \text{ 解得 } a = \frac{3}{4}.$$

法 2：联立 $\begin{cases} y = x + a \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases}$ ，得 $x^2 + (2a-2)x + a^2 - 1 = 0$ ，

$\Delta = (2a-2)^2 - 4(a^2 - 1) = -8a + 8 > 0$ ，解得 $a < 1$ ，

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， $\therefore x_1 + x_2 = 2 - 2a, x_1 x_2 = a^2 - 1$ ，

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2-2a)^2 - 4(a^2 - 1)} = 2,$$

解得 $a = \frac{3}{4}$

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$ 。

(1) 证明： $2a^2 + 2b^2 > a + b$ ；

(2) 证明： $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 直接利用 $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$ 即可证明。

(2) 根据绝对值不等式并结合 (1) 中结论即可证明。

【小问 1 详解】

因为 $2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$,

当 $a=b$ 时等号成立, 则 $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$,

因为 $a+b \geq 3$, 所以 $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2 > a+b$;

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} & |a-2b^2| + |b-2a^2| \geq |a-2b^2+b-2a^2| = |2a^2+2b^2-(a+b)| \\ & = 2a^2+2b^2-(a+b) \geq (a+b)^2-(a+b) = (a+b)(a+b-1) \geq 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$