

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷文科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ， $B = \{x | x+1 \in A\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{1, 2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 2, 9\}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据集合 B 的定义先算出具体含有的元素，然后根据交集的定义计算。

【详解】依题意得，对于集合 B 中的元素 x ，满足 $x+1 = 1, 2, 3, 4, 5, 9$ ，

则 x 可能的取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 8$ ，即 $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$ ，

于是 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

故选：A

2. 设 $z = \sqrt{2}i$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $-i$ B. 1 C. -1 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】先根据共轭复数的定义写出 $\bar{z}$ ，然后根据复数的乘法计算。

【详解】依题意得， $\bar{z} = -\sqrt{2}i$ ，故 $z\bar{z} = -2i^2 = 2$ 。

故选：D

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x-5y$ 最小值为 ()

A. 5

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

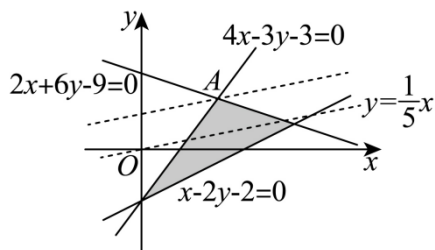
D. $-\frac{7}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出可行域后，利用 z 的几何意义计算即可得。

【详解】实数 x, y 满足 $\begin{cases} 4x-3y-3 \geq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x+6y-9 \leq 0 \end{cases}$ ，作出可行域如图：



由 $z = x-5y$ 可得 $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ ，

即 z 的几何意义为 $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ 的截距的 $-\frac{1}{5}$ ，

则该直线截距取最大值时， z 有最小值，

此时直线 $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}z$ 过点 A，

联立 $\begin{cases} 4x-3y-3=0 \\ 2x+6y-9=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$ ，即 $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ，

则 $z_{\min} = \frac{3}{2} - 5 \times 1 = -\frac{7}{2}$ 。

故选：D。

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_9 = 1$ ， $a_3 + a_7 =$ ()

A. -2

B. $\frac{7}{3}$

C. 1

D. $\frac{2}{9}$

【答案】D

【解析】

【分析】可以根据等差数列的基本量，即将题目条件全转化成 a_1 和 d 来处理，亦可用等差数列的性质进行处理，或者特殊值法处理.

【详解】方法一：利用等差数列的基本量

由 $S_9 = 1$ ，根据等差数列的求和公式， $S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = 1 \Leftrightarrow 9a_1 + 36d = 1$ ，

又 $a_3 + a_7 = a_1 + 2d + a_1 + 6d = 2a_1 + 8d = \frac{2}{9}(9a_1 + 36d) = \frac{2}{9}$.

故选：D

方法二：利用等差数列的性质

根据等差数列的性质， $a_1 + a_9 = a_3 + a_7$ ，由 $S_9 = 1$ ，根据等差数列的求和公式，

$S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_3 + a_7)}{2} = 1$ ，故 $a_3 + a_7 = \frac{2}{9}$.

故选：D

方法三：特殊值法

不妨取等差数列公差 $d = 0$ ，则 $S_9 = 1 = 9a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{9}$ ，则 $a_3 + a_7 = 2a_1 = \frac{2}{9}$.

故选：D

5. 甲、乙、丙、丁四人排成一列，丙不在排头，且甲或乙在排尾的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】分类讨论甲乙的位置，得到符合条件的情况，然后根据古典概型计算公式进行求解.

【详解】当甲排在排尾，乙排第一位，丙有 2 种排法，丁就 1 种，共 2 种；

当甲排在排尾，乙排第二位或第三位，丙有 1 种排法，丁就 1 种，共 2 种；

于是甲排在排尾共 4 种方法，同理乙排在排尾共 4 种方法，于是共 8 种排法符合题意；

基本事件总数显然是 $A_4^4 = 24$ ，

根据古典概型的计算公式，丙不在排头，甲或乙在排尾的概率为 $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

故选：B

6. 已知双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上、下焦点分别为 $F_1(0, 4), F_2(0, -4)$ ，点 $P(-6, 4)$ 在该双曲

线上，则该双曲线的离心率为（ ）

A. 4

B. 3

C. 2

D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由焦点坐标可得焦距 $2c$ ，结合双曲线定义计算可得 $2a$ ，即可得离心率.【详解】由题意， $F_1(0, -4)$ 、 $F_2(0, 4)$ 、 $P(-6, 4)$,

$$\text{则 } |F_1F_2| = 2c = 8, \quad |PF_1| = \sqrt{6^2 + (4+4)^2} = 10, \quad |PF_2| = \sqrt{6^2 + (4-4)^2} = 6,$$

$$\text{则 } 2a = |PF_1| - |PF_2| = 10 - 6 = 4, \quad \text{则 } e = \frac{2c}{2a} = \frac{8}{4} = 2.$$

故选：C.

7. 曲线 $f(x) = x^6 + 3x - 1$ 在 $(0, -1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为 ()A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

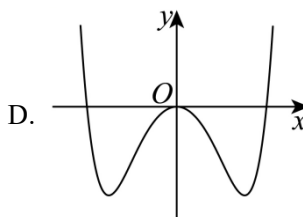
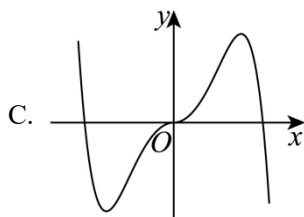
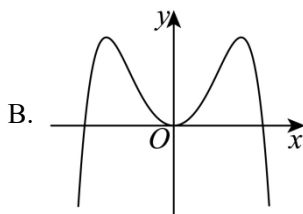
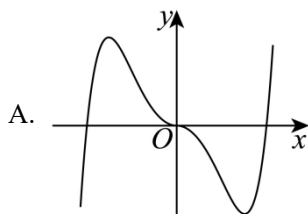
【答案】A

【解析】

【分析】先求出切线方程，再求出切线的截距，从而可求面积.

【详解】 $f'(x) = 6x^5 + 3$ ，所以 $f'(0) = 3$ ，故切线方程为 $y = 3(x - 0) - 1 = 3x - 1$ ，故切线的横截距为 $\frac{1}{3}$ ，纵截距为 -1 ，故切线与坐标轴围成的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

故选：A.

8. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的大致图像为 ()

【答案】B

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性可排除 A、C，代入 $x=1$ 可得 $f(1)>0$ ，可排除 D.

【详解】 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)$,

又函数定义域为 $[-2.8, 2.8]$ ，故该函数为偶函数，可排除 A、C，

$$\text{又 } f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} > 0,$$

故可排除 D.

故选：B.

9. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$ ，则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $2\sqrt{3}+1$ B. $2\sqrt{3}-1$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】先将 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ 弦化切求得 $\tan \alpha$ ，再根据两角和的正切公式即可求解.

【详解】因为 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}, \Rightarrow \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1,$$

故选：B.

原 10 题略

10. 设 α 、 β 是两个平面， m 、 n 是两条直线，且 $\alpha \perp \beta = m$. 下列四个命题：

- ①若 $m \parallel n$ ，则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \parallel \beta$ ②若 $m \perp n$ ，则 $n \perp \alpha, n \perp \beta$
③若 $n \parallel \alpha$ ，且 $n \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$ ④若 n 与 α 和 β 所成的角相等，则 $m \perp n$

其中所有真命题的编号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据线面平行的判定定理即可判断①；举反例即可判断②④；根据线面平行的性质即可判断③.

【详解】对①，当 $n \subset \alpha$ ，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \beta$ ，则 $n \parallel \beta$ ，

当 $n \subset \beta$ ，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha$ ，则 $n \parallel \alpha$ ，

当 n 既不在 α 也不在 β 内，因为 $m \parallel n$ ， $m \subset \alpha, m \subset \beta$ ，则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$ ，故①正确；

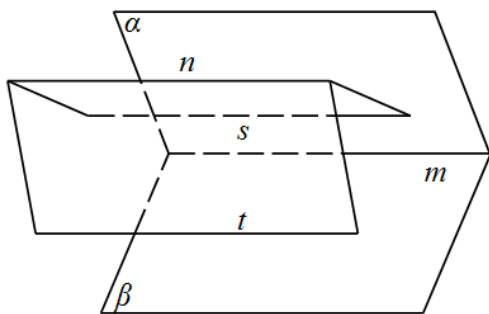
对②，若 $m \perp n$ ，则 n 与 α, β 不一定垂直，故②错误；

对③，过直线 n 分别作两平面与 α, β 分别相交于直线 s 和直线 t ，

因为 $n \parallel \alpha$ ，过直线 n 的平面与平面 α 的交线为直线 s ，则根据线面平行的性质定理知 $n \parallel s$ ，

同理可得 $n \parallel t$ ，则 $s \parallel t$ ，因为 $s \not\subset$ 平面 β ， $t \subset$ 平面 β ，则 $s \parallel$ 平面 β ，

因为 $s \subset$ 平面 α ， $\alpha \cap \beta = m$ ，则 $s \parallel m$ ，又因为 $n \parallel s$ ，则 $m \parallel n$ ，故③正确；



对④，若 $\alpha \cap \beta = m$ ， n 与 α 和 β 所成的角相等，如果 $n \parallel \alpha, n \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$ ，故④错误；

综上只有①③正确，

故选：A.

11. 在 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c ，若 $B = \frac{\pi}{3}$ ， $b^2 = \frac{9}{4}ac$ ，则 $\sin A + \sin C =$ （ ）

A. $\frac{3}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理得 $\sin A \sin C = \frac{1}{3}$ ，再利用余弦定理有 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$ ，再利用正弦定理得到

$\sin^2 A + \sin^2 C$ 的值，最后代入计算即可.

【详解】因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则由正弦定理得 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$.

由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$,

即: $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$, 根据正弦定理得 $\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12}$,

所以 $(\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}$,

因为 A, C 为三角形内角, 则 $\sin A + \sin C > 0$, 则 $\sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选: C.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

原 13 题略

12. 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】结合辅助角公式化简成正弦型函数, 再求给定区间最值即可.

【详解】 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$,

当 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = 2$.

故答案为: 2

13. 已知 $a > 1$, $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

【答案】64

【解析】

【分析】将 $\log_8 a, \log_a 4$ 利用换底公式转化成 $\log_2 a$ 来表示即可求解.

【详解】由题 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{2}$, 整理得 $(\log_2 a)^2 - 5 \log_2 a - 6 = 0$,

$\Rightarrow \log_2 a = -1$ 或 $\log_2 a = 6$, 又 $a > 1$,

所以 $\log_2 a = 6 = \log_2 2^6$, 故 $a = 2^6 = 64$

故答案：64.

14. 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-2, 1)$

【解析】

【分析】将函数转化为方程，令 $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$ ，分离参数 a ，构造新函数

$g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$ ，结合导数求得 $g(x)$ 单调区间，画出大致图形数形结合即可求解.

【详解】令 $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$ ，即 $a = x^3 + x^2 - 5x + 1$ ，令 $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1 (x > 0)$ ，

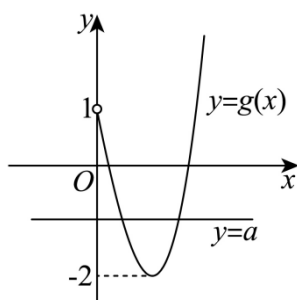
则 $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$ ，令 $g'(x) = 0 (x > 0)$ 得 $x = 1$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增， $g(0) = 1, g(1) = -2$ ，

因为曲线 $y = x^3 - 3x$ 与 $y = -(x-1)^2 + a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点，

所以等价于 $y = a$ 与 $g(x)$ 有两个交点，所以 $a \in (-2, 1)$.



故答案为： $(-2, 1)$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17 题第 21 题为必考题，每个考题考生必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 通项公式。

【答案】(1) $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

$$(2) \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} \right)^n - \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 利用退位法可求公比，再求出首项后可求通项；

(2) 利用等比数列的求和公式可求 S_n .

【小问 1 详解】

因为 $2S_n = 3a_{n+1} - 3$, 故 $2S_{n-1} = 3a_n - 3$,

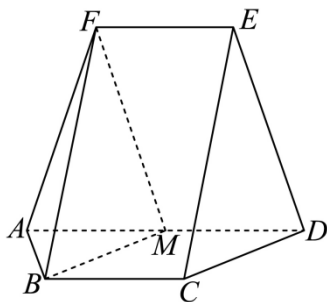
所以 $2a_n = 3a_{n+1} - 3a_n$ ($n \geq 2$) 即 $5a_n = 3a_{n+1}$ 故等比数列的公比为 $q = \frac{5}{3}$,

故 $2a_1 = 3a_2 - 3 = 3a_1 \times \frac{5}{3} - 3 = 5a_1 - 3$, 故 $a_1 = 1$, 故 $a_n = \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1}$.

【小问 2 详解】

由等比数列求和公式得 $S_n = \frac{1 \times \left[1 - \left(\frac{5}{3} \right)^n \right]}{1 - \frac{5}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} \right)^n - \frac{3}{2}$.

16. 如图，在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，
 $BC \parallel AD, EF \parallel AD$, $AD = 4, AB = BC = EF = 2$, $ED = \sqrt{10}, FB = 2\sqrt{3}$, M 为 AD 的中点.



(1) 证明: $BM \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 求点 M 到 ABF 的距离.

【答案】(1) 证明见详解;

$$(2) \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

【解析】

【分析】(1) 结合已知易证四边形 $BCDM$ 为平行四边形，可证 $BM \parallel CD$ ，进而得证；

(2) 作 $FO \perp AD$ ，连接 OB ，易证 OB, OD, OF 三垂直，结合等体积法 $V_{M-ABF} = V_{F-ABM}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $BC \parallel AD, BC = 2, AD = 4, M$ 为 AD 的中点，所以 $BC \parallel MD, BC = MD$ ，

四边形 $BCDM$ 为平行四边形，所以 $BM \parallel CD$ ，

又因 $BM \not\subset$ 平面 CDE ， $CD \subset$ 平面 CDE ，所以 $BM \parallel$ 平面 CDE ；

【小问 2 详解】

如图所示，作 $BO \perp AD$ 交 AD 于 O ，连接 OF ，因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形， $BC \parallel AD, AD = 4, AB = BC = 2$ ，所以 $CD = 2$ ，

结合 (1) $BCDM$ 为平行四边形，可得 $BM = CD = 2$ ，

又 $AM = 2$ ，所以 $\triangle ABM$ 为等边三角形， O 为 AM 中点，所以 $OB = \sqrt{3}$ ，

又因为四边形 $ADEF$ 为等腰梯形， M 为 AD 中点，所以 $EF = MD, EF \parallel MD$ ，

四边形 $EFMD$ 为平行四边形， $FM = ED = AF$ ，所以 $\triangle AFM$ 为等腰三角形，

$\triangle ABM$ 与 $\triangle AFM$ 底边上中点 O 重合， $OF \perp AM$ ， $OF = \sqrt{AF^2 - AO^2} = 3$ ，

因为 $OB^2 + OF^2 = BF^2$ ，所以 $OB \perp OF$ ，所以 OB, OD, OF 互相垂直，

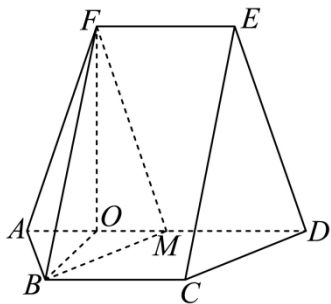
由等体积法可得 $V_{M-ABF} = V_{F-ABM}$ ， $V_{F-ABM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot FO = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \cdot 3 = \sqrt{3}$ ，

$$\cos \angle FAB = \frac{FA^2 + AB^2 - FB^2}{2FA \cdot AB} = \frac{(\sqrt{10})^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot 2} = \frac{1}{2\sqrt{10}}, \sin \angle FAB = \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{10}},$$

$$S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2} FA \cdot AB \cdot \sin \angle FAB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{39}}{2},$$

设点 M 到 FAB 的距离为 d ，则 $V_{M-FAB} = V_{F-ABM} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle FAB} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot d = \sqrt{3}$ ，

解得 $d = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ ，即点 M 到 ABF 的距离为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ 。



17. 已知函数 $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a \leq 2$ 时, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < e^{x-1}$ 恒成立.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 求导, 含参分类讨论得出导函数的符号, 从而得出原函数的单调性;

(2) 先根据题设条件将问题可转化成证明当 $x > 1$ 时, $e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x > 0$ 即可.

【小问 1 详解】

$$f(x) \text{ 定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{ax-1}{x} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

【小问 2 详解】

$a \leq 2$, 且 $x > 1$ 时, $e^{x-1} - f(x) = e^{x-1} - a(x-1) + \ln x - 1 \geq e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x$,

令 $g(x) = e^{x-1} - 2x + 1 + \ln x (x > 1)$, 下证 $g(x) > 0$ 即可.

$$g'(x) = e^{x-1} - 2 + \frac{1}{x}, \text{ 再令 } h(x) = g'(x), \text{ 则 } h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2},$$

显然 $h'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 则 $h'(x) > h'(1) = e^0 - 1 = 0$,

即 $g'(x) = h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

故 $g'(x) > g'(1) = e^0 - 2 + 1 = 0$, 即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) > g(1) = e^0 - 2 + 1 + \ln 1 = 0$, 问题得证

18. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在 C 上, 且 $MF \perp x$ 轴.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(4, 0)$ 的直线与 C 交于 A, B 两点, N 为线段 FP 的中点, 直线 NB 交直线 MF 于点 Q , 证明: $AQ \perp y$ 轴.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 设 $F(c, 0)$, 根据 M 的坐标及 $MF \perp x$ 轴可求基本量, 故可求椭圆方程.

(2) 设 $AB: y = k(x - 4)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立直线方程和椭圆方程, 用 A, B 的坐标表示 $y_1 - y_Q$, 结合韦达定理化简前者可得 $y_1 - y_Q = 0$, 故可证 $AQ \perp y$ 轴.

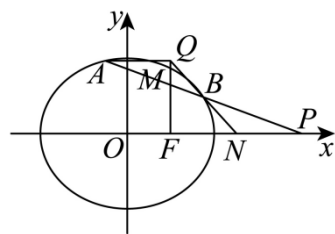
【小问 1 详解】

设 $F(c, 0)$, 由题设有 $c = 1$ 且 $\frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$, 故 $\frac{a^2 - 1}{a} = \frac{3}{2}$, 故 $a = 2$, 故 $b = \sqrt{3}$,

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

【小问 2 详解】

直线 AB 的斜率必定存在, 设 $AB: y = k(x - 4)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,



由 $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = k(x - 4) \end{cases}$ 可得 $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$,

故 $\Delta = 1024k^4 - 4(3+4k^2)(64k^2-12) > 0$, 故 $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$,

$$\text{又 } x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{64k^2-12}{3+4k^2},$$

$$\text{而 } N\left(\frac{5}{2}, 0\right), \text{ 故直线 } BN: y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ 故 } y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-3y_2}{2x_2 - 5},$$

$$\text{所以 } y_1 - y_Q = y_1 + \frac{3y_2}{2x_2 - 5} = \frac{y_1 \times (2x_2 - 5) + 3y_2}{2x_2 - 5}$$

$$= \frac{k(x_1 - 4) \times (2x_2 - 5) + 3k(x_2 - 4)}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8}{2x_2 - 5} = k \frac{2 \times \frac{64k^2-12}{3+4k^2} - 5 \times \frac{32k^2}{3+4k^2} + 8}{2x_2 - 5}$$

$$= k \frac{128k^2 - 24 - 160k^2 + 24 + 32k^2}{3 + 4k^2} = 0,$$

故 $y_1 = y_Q$, 即 $AQ \perp y$ 轴.

【点睛】方法点睛: 利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下:

- (1) 设直线方程, 设交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$;
- (2) 联立直线与圆锥曲线的方程, 得到关于 x (或 y) 的一元二次方程, 注意 Δ 的判断;
- (3) 列出韦达定理;
- (4) 将所求问题或题中的关系转化为 $x_1 + x_2$ 、 x_1x_2 (或 $y_1 + y_2$ 、 y_1y_2) 的形式;
- (5) 代入韦达定理求解.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑, 多涂、错涂、漏涂均不给分, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \rho \cos \theta + 1$.

- (1) 写出 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: \begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$ (t 为参数), 若 C 与 l 相交于 A, B 两点, 若 $|AB|=2$, 求 a 的值.

【答案】(1) $y^2 = 2x + 1$

(2) $a = \frac{3}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$ 可得 C 的直角方程.

(2) 将直线的新的参数方程代入 C 的直角方程,

法 1: 结合参数 s 的几何意义可得关于 a 的方程, 从而可求参数 a 的值;

法 2: 将直线的直角方程与曲线的直角方程联立, 结合弦长公式可求 a 的值.

【小问 1 详解】

由 $\rho = \rho \cos \theta + 1$, 将 $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho \cos \theta = x \end{cases}$ 代入 $\rho = \rho \cos \theta + 1$,

故可得 $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$, 两边平方后可得曲线 直角坐标方程为 $y^2 = 2x + 1$.

【小问 2 详解】

对于直线 l 的参数方程消去参数 t , 得直线的普通方程为 $y = x + a$.

法 1: 直线 l 的斜率为 1, 故倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$,

故直线的参数方程可设为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y = a + \frac{\sqrt{2}}{2}s \end{cases}, s \in \mathbf{R}.$

将其代入 $y^2 = 2x + 1$ 中得 $s^2 + 2\sqrt{2}(a-1)s + 2(a^2-1) = 0$

设 A, B 两点对应的参数分别为 s_1, s_2 , 则 $s_1 + s_2 = -2\sqrt{2}(a-1), s_1 s_2 = 2(a^2-1)$,

且 $\Delta = 8(a-1)^2 - 8(a^2-1) = 16 - 16a > 0$, 故 $a < 1$,

$\therefore |AB| = |s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1 s_2} = \sqrt{8(a-1)^2 - 8(a^2-1)} = 2$, 解得 $a = \frac{3}{4}$.

法 2: 联立 $\begin{cases} y = x + a \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases}$, 得 $x^2 + (2a-2)x + a^2 - 1 = 0$,

$\Delta = (2a-2)^2 - 4(a^2-1) = -8a + 8 > 0$, 解得 $a < 1$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $\therefore x_1 + x_2 = 2 - 2a, x_1 x_2 = a^2 - 1$,

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(2-2a)^2 - 4(a^2 - 1)} = 2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{3}{4}$$

20. 实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$.

(1) 证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2) 证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 直接利用 $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$ 即可证明.

(2) 根据绝对值不等式并结合 (1) 中结论即可证明.

【小问 1 详解】

$$\text{因为 } 2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0,$$

$$\text{当 } a = b \text{ 时等号成立, 则 } 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2,$$

$$\text{因为 } a + b \geq 3, \text{ 所以 } 2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2 > a + b;$$

【小问 2 详解】

$$|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq |a - 2b^2 + b - 2a^2| = |2a^2 + 2b^2 - (a+b)|$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - (a+b) \geq (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1) \geq 3 \times 2 = 6$$